EXPERIENTIA

Vol. XI - Fasc. 7 | Pag. 249–286 | 15. VII. 1955

Das Bild der heutigen Mathematik[1]

Von G. KÖTHE[2], Mainz

Das Bild, das ein der Mathematik Fernstehender von dieser Wissenschaft hat, ist in erster Linie bestimmt durch die Eindrücke und Erfahrungen, die er in der Schule gewonnen hat. Ein grosser Teil dessen, was er dort gelernt oder nicht gelernt hat, besteht aus Erkenntnissen, die bereits die Antike gewonnen hat, ein anderer Teil stammt aus den Anfängen der Neuzeit, so die Differential- und Integralrechnung, als deren Begründer NEWTON und LEIBNIZ gelten, so die analytische Geometrie, die auf DESCARTES zurückgeht.

Damit entsteht der Eindruck, dass zum mindesten diejenigen Teile der Mathematik, die auf der Schule gelehrt werden, sehr altes Gedankengut sind und dass diese Teile der Mathematik für alle Zeiten unverändert festliegen. Welche Ergänzungen kann dieses von der Schule her geprägte Bild bestenfalls noch erfahren haben? Viele haben von der Einstein'schen Relativitätstheorie gehört und vielleicht auch, dass in dieser Theorie eine sehr von der üblichen abweichende Geometrie verwendet wird, die Mitte des vorigen Jahrhunderts der Mathematiker RIEMANN entwickelt hat. Manch einer mag auch noch wissen, dass in der heutigen Atomphysik sehr komplizierte mathematische Hilfsmittel benützt werden, die erst in diesem Jahrhundert erarbeitet wurden.

Schliesslich liest man heute sehr viel über riesige Rechenmaschinen, die mit unvorstellbarer Geschwindigkeit Rechnungen bewältigen, die ihres Umfanges wegen auf anderem Wege nicht geleistet werden könnten. Dies ist aber mehr ein Fortschritt der Technik und bedeutet keine neue Erkenntnis in der Theorie oder, wie man sagt, in der reinen Mathematik. Nur um diese soll es sich bei unserer Betrachtung handeln.

Das Bild, das ein der Mathematik Fernstehender haben wird, ist also das einer sehr weit vollendeten, in ihrem Kern völlig feststehenden Wissenschaft, in der die noch offenen Fragen wohl sehr kompliziert sein werden. Da er solche Fragen nicht kennt, wird er auch annehmen, dass ihre Zahl vielleicht relativ begrenzt sein wird. Ein weiterer Eindruck, den die Schule vermittelt, ist der, dass Mathematik etwas recht Mühsames, mit langwierigen Rechnungen Verbundenes ist. Der Kalkül steht im Vordergrund, und neue Erkenntnisse sind meist nur durch langwierige Rechnungen und Kunstgriffe in den Beweisen zu erlangen.

Ist dieses Bild zutreffend? Wenn man diese Frage führenden Mathematikern des ausgehenden 19. Jahrhunderts vorgelegt hätte, so hätten nicht wenige diese Frage im wesentlichen bejaht. Viele Mathematiker dieser Zeit fühlten sich als die Vollender einer von DESCARTES, LEIBNIZ und NEWTON ausgehenden Entwicklung, deren Krönung die im vorigen Jahrhundert entwickelte Theorie der analytischen Funktionen darstellte. Der exakte Aufbau des Begriffs der reellen Zahl durch CANTOR und WEIERSTRASS untermauerte dieses Gebäude der heute als klassisch bezeichneten Mathematik. Man findet auch in den jetzigen Vorlesungsverzeichnissen der Universitäten noch dieses Bild der klassischen Mathematik vorherrschend, die Hauptvorlesungen haben immer noch die Titel Differential- und Integralrechnung, analytische Geometrie, Differentialgleichungen, Differentialgeometrie, Funktionentheorie, die zentralen Themen der klassischen Mathematik. Also selbst ein Student wird im ersten Teil des Studiums dasselbe Bild von der Mathematik haben, das der klassischen Mathematik des 19. Jahrhunderts.

Und doch hat sich im 20. Jahrhundert die Mathematik völlig gewandelt, neue Auffassungen vom Wesen der Mathematik haben sich durchgesetzt, eine neue Blüte dieser Wissenschaft hat begonnen, die Entwicklung neuer Zweige geht in einem Tempo vor sich, zu dem es in früheren Epochen keinen Vergleich gibt.

Bevor ich versuche, Ihnen diese Wandlung deutlich zu machen und zu erklären, lassen Sie mich kurz auf die in manchem analoge Wandlung in der Physik hinweisen, die weit mehr in das Bewusstsein der Allgemeinheit gedrungen ist. Auch hier ist im 20. Jahrhundert ein neues Bild entstanden, man kann hier sogar mit Recht von einem neuen Weltbild sprechen. Kann man die Einstein'sche Relativitätstheorie noch als die Vollendung der klassischen Physik ansprechen, so bedeutet die Quantenmechanik einen völligen Bruch mit dieser klassischen Physik; zur Erfassung der Beobachtungen ist ein völlig neues Begriffsystem notwendig geworden, das nur einem mathematisch Geschulten wirklich zugänglich ist.

Dieses neue Weltbild bereitet sich seit der Jahrhundertwende vor, zum Durchbruch kam es jedoch erst in der Zeit zwischen den beiden Weltkriegen.

[1] Ansprache bei der feierlichen Rektoratsübergabe am 18. November 1954.

[2] Mathematisches Institut der Universität Mainz.

Es ist eine kaum zufällige Parallele, dass auch die Entwicklung, die zu dem neuen Bild der Mathematik führte, ihren Höhepunkt ebenfalls zwischen den beiden Weltkriegen hatte. Doch sind hier die einzelnen Linien der Entwicklung verschlungener und geben keinen so klaren Einschnitt wie in der Physik.

Die Erschütterung der Grundlagen der klassischen Mathematik fällt in die letzten Jahre des vorigen Jahrhunderts, als sich in einem damals neu entwickelten Gebiet, der sogenannten Mengenlehre, logische Widersprüche zeigten[1]. Diese Antinomien betreffen sehr am Rande der Mathematik liegende Fragen und sind aufs engste verwandt mit logischen Paradoxien, die schon im Altertum bekannt waren. Sie schienen weniger die Mathematik selbst als die Logik anzugehen. Es erwuchs der Mathematik jedoch die Aufgabe, sich gegen das Auftreten solcher Widersprüche zu sichern. Die genauere Untersuchung ergab die bestürzende Tatsache, dass die logischen Schlüsse, die zu diesen Paradoxien führten, in der klassischen Mathematik gang und gäbe waren. Es handelt sich dabei vom Standpunkt der Logik aus um ein zirkelhaftes Vorgehen in den Definitionen, es werden etwa Zahlen mit Hilfe von Gesamtheiten von Zahlen definiert, in denen die zu definierende Zahl selbst vorkommt, zum Beispiel die grösste Zahl einer Menge von Zahlen.

Wie war es zu erklären, dass in der strengsten aller Wissenschaften solche Definitionen zugelassen wurden und dass niemand ernstlich die Zulässigkeit dieser Methoden anzweifelte? Der Grund lag in der klassischen Auffassung des Zahlbegriffs, die wir heute auch als die platonistische Einstellung zur Mathematik bezeichnen. – Denken wir etwa an die sogenannten natürlichen Zahlen 1, 2, 3 usw. Wenn wir eine mathematische Frage über diese Zahlen aufwerfen, also ein zahlentheoretisches Problem stellen, so nehmen wir als selbstverständlich an, dass diese Frage eine Antwort besitzt, selbst wenn wir nie imstande sein sollten, sie wirklich zu finden. Wir stellen uns die Zahlen also als in irgendeiner Weise unabhängig von uns gegeben vor. Stellen wir uns auf diesen Standpunkt, dann verschwinden aber auch die Einwände gegen die vorhin als zirkelhaft erkannten Methoden, zum Beispiel die Definition einer grössten Zahl einer Menge von Zahlen. Es hängt also alles davon ab, ob diese platonistische Auffassung, die die mathematischen Gegenstände als etwas von uns unabhängig Gegebenes ansieht, haltbar ist oder nicht.

Die platonistische Auffassung für die allgemeine Mengentheorie, die nicht nur von Zahlenmengen, sondern von Mengen beliebiger Objekte handelt, ist durch das Auftreten der Paradoxien widerlegt. Die Auffassung, dass solche beliebige Mengen als etwas unabhängig von uns Gegebenes, also ideell Existierendes, angesehen werden können, ist unhaltbar. Und damit ist natürlich auch der platonistische Standpunkt hinsichtlich der reellen Zahlen fragwürdig geworden und somit die Grundhaltung der Mathematiker des 19. Jahrhunderts[1].

Es ist dies das zweite Mal, dass das Problem des Unendlichen eine entscheidende Rolle in der Entwicklung der Mathematik spielt. Zur Zeit der Entstehung der Differential- und Integralrechnung war es das Unendlichkleine. Noch LEIBNIZ fasste die Differentialquotienten als den Quotienten zweier unendlich kleiner Grössen auf, und erst die genaue Analyse des 19. Jahrhunderts zeigte, dass das Unendlichkleine ein in sich widerspruchsvoller Begriff ist und dass die Differentialrechnung ohne das Unendlichkleine aufgebaut werden kann durch die exakte Formulierung des Begriffs des Grenzwertes einer Zahlenfolge.

Bei der Frage, ob man sich die Zahlen als unabhängig von uns gegeben vorstellen darf, handelt es sich dagegen um die Frage der Möglichkeit einer Menge unendlich vieler mathematischer Objekte, also wieder um etwas Unendliches. Ich will die Antwort auf diese Frage vorwegnehmen. Sie ist nicht so eindeutig negativ, wie im Fall des Unendlichkleinen, aber auch nicht eindeutig positiv. Es ist tatsächlich möglich, die natürlichen Zahlen, also die Zahlen 1, 2, 3 usw., ebenso die Brüche, als in ihrer Gesamtheit vorliegend anzusehen. Es ist aber nicht möglich, die reellen Zahlen, also die unendlichen Dezimalbrüche, als in ihrer Gesamtheit gegeben anzunehmen.

Zum Verständnis dieser Antwort ist es nötig, auf die sogenannte konstruktive Auffassung der Mathematik einzugehen. Nachdem man erkannt hatte, dass die platonistische Auffassung der Mathematik zu Widersprüchen führte, musste man eine neue, unanfechtbare Grundlage finden, von der aus man versuchen konnte, die Mathematik neu aufzubauen.

Solange man die Zahlenreihe nicht als fertig gegeben ansieht, also nicht als ein «aktual Unendliches», wie man auch sagt, sondern nur als konstruktiv beliebig weit fortsetzbar, das heisst als ein «potentiell Unendliches», also etwa jede Zahl als durch eine Anzahl von Kreidestrichen gegeben ansieht, und solange man nur konstruktive Definitionen und Beweise gibt, das heisst solche, die für jede Zahl in endlich vielen Berechnungsschritten durchführbar sind, solange vermeidet man das Unendliche und die logischen Zirkel. Alles, was auf diese Weise aufgebaut werden kann, ist logisch einwandfrei. Man kann nun mit diesen Methoden versuchen, die Mathematik neu aufzubauen, und erhält damit die sogenannte konstruktive Mathematik. Es stellt sich jedoch sehr bald heraus, dass diese konstruktive Mathematik grosse Teile der klassischen Mathe-

[1] Die Mengenlehre einschliesslich der Paradoxien findet man dargestellt bei A. FRAENKEL, *Einleitung in die Mengenlehre*, 3. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin 1928).

[1] Eine ausführlichere Darstellung des heutigen Standes der hier behandelten Probleme der Grundlagenforschung gibt A. SCHMIDT, *Mathematische Grundlagenforschung, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. I 1, H. 1, Teil II (Teubner, Leipzig 1950). Als Lehrbuch sei erwähnt S. C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics* (Amsterdam 1952).

matik nicht mehr enthält und dass eine solche rein konstruktive Mathematik zu unerträglich komplizierten Formulierungen führt.

In dieser, wie es schien, für die klassische Mathematik hoffnungslosen Situation stellte DAVID HILBERT ein Programm auf, das einen Ausweg bot. Einerlei, wie man sich zur erkenntnistheoretischen Möglichkeit der platonistischen Auffassung stellt (vielen Mathematikern erscheint es sinnlos, von einem vom Menschen unabhängigen Gegebensein der Zahlen zu sprechen), vielleicht ist es wenigstens möglich, zu zeigen, dass die platonistische Auffassung in den Grunddisziplinen der Mathematik niemals zu Widersprüchen führen kann, wie sie sich in der Mengentheorie zeigten. In diesen Grunddisziplinen hat sich ja doch niemals bisher ein Widerspruch gezeigt. Dieser Widerspruchsfreiheitsbeweis müsste allerdings mit den unanfechtbaren Methoden der konstruktiven Mathematik geführt werden.

Es ist nun kurz vor dem Zweiten Weltkrieg dem Hilbert-Schüler GENTZEN[1] tatsächlich gelungen, diesen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die einfachste mathematische Disziplin, die Zahlentheorie, die Lehre von den ganzen Zahlen, zu führen. Die in der Zahlentheorie vorkommenden Schlüsse, die die ideelle Existenz der ganzen Zahlen voraussetzen, sind dadurch gerechtfertigt; damit ist also der Nachweis geführt, dass für die natürlichen Zahlen die platonistische Auffassung möglich ist.

Für die Lehre von den reellen Zahlen in der bisherigen Form erwies sich ein solcher Widerspruchsfreiheitsbeweis als nicht durchführbar, doch lässt sich wenigstens zeigen, dass die Analysis unter nur geringen Abweichungen von der klassischen Form widerspruchsfrei aufgebaut werden kann. Dieses Ergebnis wurde erst in jüngster Zeit erzielt[2].

Damit kann die Grundlagenkrise als überwunden gelten. Wie das Unendlichkleine ist damit auch die unendliche Menge als etwas fertig Gegebenes aus der Mathematik ausgeschieden, aber anders als im Fall des Unendlichkleinen kann man sie in gewissen Fällen als unschädliche Fiktion zulassen.

Wenn ich versuche, hier das Bild der heutigen Mathematik im Gegensatz zur klassischen Mathematik des 19. Jahrhunderts zu zeichnen, so musste ich auf die Grundlagenkrise besonders ausführlich eingehen, sie ist ein besonders markantes Zeichen der veränderten geistigen Situation auch in der Mathematik. Sie hat zu einer ganz neuen Einstellung zu den Grundlagen geführt und die engsten Beziehungen zu wichtigen philosophischen Fragen hergestellt.

Die Bedeutung dieser Grundlagenforschung ist übrigens für die Philosophie mindestens die gleiche wie für die Mathematik. Es ist der Grundlagenforschung zu verdanken, dass die im vorigen Jahrhundert von den Philosophen BOOLE, SCHRÖDER und FREGE begonnene Mathematisierung der Logik in raschem Zuge vollzogen wurde. Aus der Logik, die sich seit ARISTOTELES bis zum vorigen Jahrhundert kaum verändert hat, ist heute eine eigene, in rascher Fortentwicklung begriffene Wissenschaft entstanden von vielleicht noch grösserer Präzision als die Mathematik, die mathematische Logik. Ihre elementaren Teile haben in den modernen Rechenautomaten eine überraschende Anwendung gefunden. Es ist damit möglich geworden, diesen Automaten die Durchführung gewisser logischer Operationen zu übertragen[1].

Die von mir eben skizzierte Entwicklung ist aber nur die eine Seite der tiefgreifenden Wandlung, die die Mathematik seit dem vorigen Jahrhundert durchgemacht hat.

Kennzeichnend für die Mathematik des 19. Jahrhunderts ist die starke Trennung der einzelnen Gebiete voneinander, das Suchen nach Beweisen, die ganz dem Methoden- und Ideenkreis des betreffenden Gebietes entstammen. Es gab natürlich Querverbindungen, es gab auch schon grosse Gebiete, die aus dem Zusammenwirken mehrerer Disziplinen entstanden, so zum Beispiel die analytische Zahlentheorie, in der man Sätze über Primzahlen mit komplizierten Hilfsmitteln aus der Funktionentheorie bewies. Aber im allgemeinen ging die Entwicklung stark in die Richtung des Ausbaus der grossen klassischen Disziplinen und immer stärkerer Spezialisierung.

Blickt man oberflächlich auf die Mathematik von heute, so mag es scheinen, als ob die Spezialisierung sich noch verstärkt hat. Zu den klassischen Disziplinen ist noch eine grosse Zahl neuer Disziplinen getreten, die ebenfalls in rascher Entwicklung stehen. Es scheint, als ob es noch schwieriger geworden sei, eine Ordnung in diese Fülle von Gebieten zu bringen, man hat fast den Eindruck eines regellosen Wucherns von Theorien, die sich immer mehr von den klassischen Fragestellungen entfernen und in denen sich die klassischen Disziplinen verflüchtigen. Blickt man etwas genauer hin, so sieht man jedoch, dass dieser Prozess der Auflösung der klassischen Theorien und das Wachsen neuer Disziplinen nichts anderes ist als der Beginn einer neuen Ordnung des Gesamtgebietes der Mathematik und dass diese neue Ordnung gleichzeitig eine Fülle neuer Probleme freigelegt hat, von deren Existenz die klassische Mathematik nichts wusste. In dieser neuen Ordnung ist allerdings auch der Platz der klassischen Theorien ein völlig anderer geworden. Die Entstehung der klassischen Theorien ist sehr stark historisch bedingt, die Bedürfnisse der Anwendungen

[1] G. GENTZEN, *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, Math. Annalen *112*, 493 (1936).

[2] P. LORENZEN, *Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis*, Math. Z. *54*, 1 (1951).

[1] Einen Überblick über den heutigen Stand der mathematischen Logik geben H. HERMES und H. SCHOLZ, *Mathematische Logik, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. I 1, H. 1, Teil I (Teubner, Leipzig 1952).

haben dabei eine grosse Rolle gespielt. In der neuen Ordnung erweisen sie sich als aus recht verschiedenen Komponenten zusammengesetzt und müssen es sich daher gefallen lassen, aufgeteilt zu werden.

Wie ist es zu dieser Neuordnung gekommen und wie sieht sie aus? Ich will versuchen, soweit es im Rahmen eines solchen Vortrages möglich ist, diese Frage zu beantworten.

Es ist ein sehr altes Problem, zu dessen Lösung eine neue mathematische Methode, die sogenannte axiomatische Methode, entwickelt wurde. Schon EUKLID hatte den Versuch gemacht, die Geometrie aus Axiomen aufzubauen, das heisst einige wenige, nicht weiter zu beweisende Sätze über die Punkte, Geraden und Ebenen an die Spitze der Geometrie zu stellen und alle anderen Sätze rein logisch daraus abzuleiten. Die von ihm ausgewählten Axiome waren anschaulich sehr einleuchtend bis auf eines, das Parallelenaxiom, das folgendermassen lautet: Zu jeder Geraden gibt es durch jeden Punkt ausserhalb genau eine Parallele, das heisst eine Gerade, die mit der gegebenen Geraden in einer Ebene liegt und sie nicht schneidet.

Alle Versuche, dieses Parallelenaxiom als Folge der anderen Axiome abzuleiten, misslangen, und es gelang schliesslich im 19. Jahrhundert, zu beweisen, dass eine solche Ableitung tatsächlich unmöglich ist. Man zeigte, dass noch eine zweite Geometrie logisch möglich ist, in der alle anderen Axiome erfüllt sind, nur das Parallelenaxiom nicht; es gibt in dieser Geometrie statt einer immer gleich unendlich viele Parallelen durch einen Punkt.

Man lernte rasch, weitere Geometrien dadurch aufzubauen, dass man weitere Veränderungen an den Euklidischen Axiomen vornahm, und erhielt so plötzlich aus der einen klassischen Euklidischen Geometrie eine Fülle miteinander in engstem Zusammenhang stehender analoger Geometrien. Diese zuerst aus rein mathematischen Überlegungen aufgebauten Geometrien wurden unvermutet für die Physik wichtig; heute weiss man, dass die Geometrie des uns umgebenden Raumes nicht die Euklidische, sondern eine solche neue Geometrie ist[1].

Es ist nun diese axiomatische Methode, deren Anwendung auch auf die übrigen Disziplinen der Mathematik zur Neuordnung der Mathematik geführt hat. Die axiomatische Methode ist noch im vorigen Jahrhundert und am Anfang dieses Jahrhunderts in der Geometrie voll ausgebildet worden, ihre systematische Anwendung auf die übrige Mathematik fällt jedoch erst in dieses Jahrhundert. Wie so oft ist auch diese neue Methode zuerst an einem recht verwickelten Gegenstand, in diesem Fall der Geometrie, entwickelt worden, an dem man zuerst ihre grosse Bedeutung erkannte, und es dauerte noch einige Zeit, bis sie sich auch in den anderen Gebieten der Mathematik durchsetzte.

Ich will versuchen, an einem Ihnen allen bekannten Beispiel das Vorgehen der axiomatischen Methode anzudeuten.

Das Beispiel ist der Bereich der reellen Zahlen, also der unendlichen Dezimalbrüche, der Grundbereich der klassischen Mathematik. Man kann bekanntlich folgende Operationen mit den reellen Zahlen vornehmen: Man kann erstens die bekannten vier Rechenoperationen ausführen, man kann sie also addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Man kann sie zweitens der Grösse nach vergleichen, und es ist drittens ein Grenzprozess erklärt – so streben etwa die Zahlen 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ usw. nach der Zahl 0.

Der Bereich der reellen Zahlen hat also drei recht verschiedenartige Gruppen von Eigenschaften, und es ist nun naheliegend, jede dieser Gruppen von Eigenschaften gesondert mit der axiomatischen Methode zu studieren.

Man wird also erstens Bereiche studieren, in denen nur die vier Rechenoperationen erklärt sind und den Gesetzen gehorchen, die wir von den reellen Zahlen her kennen, zum Beispiel dem sogenannten kommutativen Gesetz der Addition $a + b = b + a$. Diese Gesetze werden als Axiome der Untersuchung vorangestellt. Ein Bereich von Elementen, in dem eine Addition und Multiplikation erklärt ist, für die diese Axiome gelten, wird als ein Körper bezeichnet. Der Bereich der reellen Zahlen ist also jetzt ein Beispiel für einen Körper. Und man wird sofort weiterfragen: Gibt es noch andere, vom Bereich der reellen Zahlen wesentlich verschiedene Körper? Kann man sie etwa alle aufzählen und durch gewisse zusätzliche Eigenschaften voneinander unterscheiden? Man wird ferner versuchen, eine oder die andere Eigenschaft fallenzulassen, die man von den reellen Zahlen her kennt, man wird zum Beispiel versuchen, zuzulassen, dass ein Produkt $a \cdot b$ Null wird, ohne dass einer der Faktoren Null zu sein braucht. Damit erklärt man neue Typen von Bereichen, die zu den sogenannten Ringen gehören.

Ein besonders einfacher Fall entsteht, wenn man überhaupt nur eine Rechenoperation zulässt, die Multiplikation. Die wichtigsten dieser Bereiche heissen Gruppen, und es hat sich gerade die Theorie dieser Gruppen als ein besonders fruchtbares Gebiet der modernen Mathematik herausgestellt, mit wichtigen Anwendungen in der Atomphysik.

Die Disziplin, in der alle die eben genannten Untersuchungen zusammengefasst sind, nennt man die Algebra. Nun ist die Algebra auch eine der Hauptdisziplinen des 19. Jahrhunderts gewesen, es war aber eine ganz andere Problemstellung als die eben skizzierte, die dieser klassischen Algebra zugrunde lag. Das zentrale Thema der klassischen Algebra war die Auflösung der Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten. Dieses Problem ist ursprünglich ein reines Rechen-

[1] Das klassische Werk über die Axiomatik der Geometrie ist D. HILBERT, *Die Grundlagen der Geometrie*, 7. Auflage (Teubner, Leipzig 1930).

problem gewesen. Aber schon im vorigen Jahrhundert hatte sich das Interesse stark verschoben, immer mehr trat an die Stelle der faktischen Berechnung der Lösungen einer Gleichung das Bemühen um eine begriffliche Aufhellung der recht verwickelten Struktur der Lösungen. Dieses Ziel ist im 19. Jahrhundert in der Theorie von GALOIS tatsächlich erreicht worden, und diese Theorie wurde das Vorbild für die Untersuchungen der modernen Algebra. In der Galois'schen Theorie traten die ersten Beispiele von weiteren Körpern neben dem Bereich der reellen und komplexen Zahlen auf und die ersten Beispiele von Gruppen. Es geht der Algebra von heute in erster Linie um die Erforschung der begrifflichen Struktur der vielen Bereiche, deren Existenz durch die axiomatische Methode erst entdeckt wurde; die moderne Algebra ist also die Lehre von den Gruppen, Körpern, Ringen usw[1].

Doch kehren wir zur Analyse des Begriffs der reellen Zahl zurück. Die zweite Gruppe von Eigenschaften waren die Ordnungseigenschaften. Wieder wird man ganz allgemein Bereiche betrachten, für deren Elemente nur eine Beziehung $a \leq b$ erklärt ist und wird eine allgemeine Theorie aller dieser geordneten Bereiche aufzubauen versuchen. Auch dies ist geschehen und hat eine Theorie ergeben, die man als die Theorie der geordneten Mengen bezeichnet. Ihr wichtigstes Teilgebiet ist die Lehre von den Verbänden, einer besonderen Klasse von geordneten Mengen[2].

Schliesslich wird eine dritte Theorie, die sich mit den Grenzwertprozessen beschäftigt, zu entwickeln sein; es ist dies die sogenannte Topologie, die heute im Zentrum des mathematischen Interesses steht. Sie beschäftigt sich mit der Untersuchung von allgemeinen Räumen, die man aus den klassischen mehrdimensionalen Räumen entwickelt hat und in denen Grenzprozesse erklärt sind[3].

Offenbar sind dies jetzt drei Disziplinen, die in ihren Grundbegriffen wesentlich einfacher sind als die Theorie der reellen Zahlen. Geht man systematisch vor, so hat man also diese drei Disziplinen an die Spitze zu stellen, der Bereich der reellen Zahlen ist dann ein Beispiel eines Bereichs, der allen drei Disziplinen angehört. Er ist nämlich ein Körper, eine geordnete Menge und ein eindimensionaler Raum.

Es hat sich nun gezeigt, dass auch die meisten anderen klassischen Disziplinen Gebiete behandeln, die auf diese drei Disziplinen und ihre Kombination zurückgeführt werden können, so dass man jetzt Algebra, Topologie und Theorie der geordneten Mengen als die neuen Grunddisziplinen der Mathematik anzusprechen hat. Die Bereiche, die einer dieser Theorien angehören, heissen die Grundstrukturen der Mathematik. Die klassischen Disziplinen handeln von zusammengesetzten Strukturen, ein Beispiel ist die von uns behandelte Struktur der reellen Zahlen.

Die Wandlung der klassischen Algebra zur modernen Algebra vollzog sich zwischen den beiden Weltkriegen. Es waren EMIL ARTIN und EMMY NOETHER, die die Wendung zur axiomatischen Einstellung in aller Schärfe vollzogen. Sie haben damit der Algebra grosse neue Gebiete erschlossen und den Vorrang der rein begrifflichen Methoden vor den rechnerischen Methoden bewiesen.

Es ist heute das Verdienst einer Gruppe französischer Mathematiker, des sogenannten Bourbakikreises, systematisch die Neuordnung der gesamten Mathematik nach den dargelegten Ideen in einem grossangelegten Werk in Angriff genommen zu haben[1]. Dort tritt an die Stelle der bisherigen isolierten Einzeldisziplinen ein nach den verschiedenen Strukturen stufenförmig gegliederter Aufbau der Mathematik. In dieser Neugliederung, die ebenfalls durch eine Tieferlegung der Fundamente erzielt wurde, ist aus der Mathematik wieder ein einheitlich gegliedertes Ganzes geworden.

Ich bin mir bewusst, dass dieser Versuch ein Bild der heutigen Mathematik zu zeichnen, in Vielem mangelhaft ist. Das Bild ist in Wirklichkeit natürlich verwickelter, die von mir gezogenen Linien simplifizieren und vergröbern, auch ist die Sicht sicher einseitig, aber ich glaube doch, dass die Entwicklungslinien, die ich hier aufgezeigt habe, einen sehr wesentlichen Teil des Gesamtbildes wiedergeben.

Summary

The picture of mathematical science which a non-mathematician has, is determined by his experience in school. He will have the opinion that mathematics is a very old science, and he will have some difficulty in understanding that mathematics of to-day is a very rapidly growing science with many new problems. It is the aim of this article to outline some of the ideas which underly the recent development of mathematics. Mathematics of the nineteenth century can be roughly understood as the completion of the ideas of DESCARTES, LEIBNIZ, and NEWTON. The chief domains of this classical mathematics are analysis in its various branches, algebra, number theory and geometry. The wellknown paradoxes in set theory discovered at the end of nineteenth century have led to an entirely new understanding of the foundations of mathematics. The so-called platonic viewpoint, which looks at numbers as entities existing independently of the human mind, is now abandoned, numbers are now considered as existing only

[1] Die Galois'sche Theorie und die neue Algebra findet man dargestellt in B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, Bd. I, 3. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin 1950).

[2] Zur Theorie der geordneten Mengen und Verbände vgl. G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, American Math. Soc. Colloq. Publ., Bd. 25 (New York 1948).

[3] Die Grundbegriffe der allgemeinen Topologie sind dargestellt bei N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Actualités sci. industr. N° 858–1142 (Hermann, Paris 1951).

[1] Dies sind die Eléments de Mathématique von N. BOURBAKI, von denen bis heute 17 Bände in der Sammlung Actualités (s. Anm. 3 links) erschienen sind. Ein Aufsatz, in dem das Programm der Neuordnung der Mathematik entwickelt wird, stammt von N. BOURBAKI, *The architecture of mathematics*, American math. Monthly *57*, 221 (1950).

if they can be constructed in a number of finite steps. This new viewpoint led to many difficulties. The classical disciplines had to be rebuilt. This was only possible by an exact analysis of mathematical thinking; the methods of mathematical logic were developed, by them it was possible to give a proof of the non-contradictory nature of the classical disciplines of mathematics. But this new understanding of the foundations of mathematics is only one side of modern mathematics. The axiomatic method, first developed in geometry, led to a new classification of mathematical notions. The basic disciplines of modern mathematics are algebra, theory of ordered sets and topology. This is shown by an analysis of the well-known concept of a real number. By reducing every mathematical concept to a few simple basic notions, the so-called elementary structures, the whole of mathematics now appears as a unity, a hierarchy of structures, wherein the classical disciplines and many new branches of mathematics finds their places. A group of French mathematicians, under the name of *Bourbaki*, are now writing a systematic exposition of the elements of mathematics from this new viewpoint.

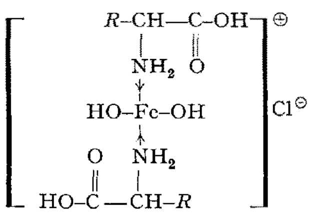
Brèves communications - Kurze Mitteilungen
Brevi comunicazioni - Brief Reports

Les auteurs sont seuls responsables des opinions exprimées dans ces communications. – Für die kurzen Mitteilungen ist ausschliesslich der Autor verantwortlich. – Per le brevi comunicazioni è responsabile solo l'autore. – The editors do not hold themselves responsible for the opinions expressed by their correspondents.

Eisen(III)-Komplexe mit 3 ungepaarten Elektronen

Das Fe^{3+}-Ion befindet sich in einem $^6S_{5/2}$-Grundzustand und hat daher in allen Salzen und Ionenkomplexen das dem Spin von 5 ungepaarten Elektronen entsprechende magnetische Moment von 5,92 μ_B (μ_B = Bohrsches Magneton). Dasselbe Moment weisen auch Durchdringungskomplexe auf, bei denen keine *d*-Bahnen des Zentralatoms für die Bindung benötigt werden. Nach Pauling[1] ist dies zum Beispiel der Fall, wenn 4 Liganden mit sp^3-Bastardbindungen tetraedrisch am Zentralatom verankert sind. Sind dagegen 6 Liganden mit d^2sp^3-Bastardbindungen in oktaedrischer Anordnung mit dem Zentralatom verknüpft, so bleiben nur noch drei *d*-Bahnen für die Verteilung der fünf *d*-Elektronen des Eisen(III)-Ions übrig. Demgemäss wird bei solchen Komplexen, zum Beispiel dem $K_3[Fe(CN)_6]$, angenähert das magnetische Spinmoment eines ungepaarten Elektrons gefunden[2]. Darüber hinaus könnte das dreiwertige Eisen nach der Paulingschen Theorie auch Koordinationsverbindungen mit 4 Liganden bilden, die durch dsp^2-Bastardbindungen mit dem Zentralatom verknüpft sind und dementsprechend die Ecken eines Quadrates besetzen. Da in diesem Falle vier *d*-Bahnen für die fünf *d*-Elektronen zur Verfügung stehen, ist das Spinmoment von 3 ungepaarten Elektronen, μ_{eff} = 3,87 μ_B, zu erwarten. Auf die Existenzmöglichkeit solcher ebenen Eisen(III)-Komplexe schlossen schon Coryell, Stitt und Pauling[3] aus der abnehmenden Suszeptibilität des gelösten Methämoglobins im Verlauf der Titration mit Alkali. Einen Wert von μ_{eff} = 3,81 μ_B (22°C) haben interessanterweise Michaelis, Coryell und Granick[4] beim Ferritin erhalten und daraus geschlossen, dass dieses physiologisch wichtige Eisen(III)-Proteid hochmolekulare, kolloidale Eisenhydroxydmizellen enthalte.

Als Modellsubstanzen für das Ferritin dargestellte Eisen(III)-Verbindungen neutraler Aminosäuren wurden von Bielig und Bayer[1] als Komplexe der folgenden Konstitution mit 4 Liganden am Zentralatom erkannt:



R vgl. Tabelle I

Die magnetischen Eigenschaften dieser synthetischen Komplexe und des Ferritins sind in der Tabelle zusammengestellt. Darin bedeuten *MG* das Molekulargewicht, χ_{mol} die bei 22°C mit einer magnetischen Waage gemessene molare Suszeptibilität, wobei die diamagnetische Korrektur für den organischen Anteil nach P. Pascal[2] berechnet und berücksichtigt ist, und μ_{eff} das daraus berechnete effektive magnetische Moment (Fehlergrenze ± 2%).

Die für die Eisen(III)-Komplexe II–V der neutralen Aminosäuren gefundenen μ_{eff}-Werte von etwas mehr als 4 Bohrschen Magnetonen liegen in der Nähe des für 3 ungepaarte Elektronen berechneten Spinmoments von 3,87 μ_B. Gegenüber der Theorie etwas zu hohe effektive magnetische Momente sind bei Komplexverbindungen von Übergangselementen mit mehr als fünf *d*-Elektronen keine Seltenheit. Sie werden durch eine nicht voll-

[1] L. Pauling, J. Amer. chem. Soc. *53*, 1391 (1931).

[2] W. Biltz, Z. anorg. Chem. *170*, 161 (1928).

[3] C. D. Coryell, F. Stitt und L. Pauling, J. Amer. chem. Soc. *59*, 633 (1937). – Siehe auch W. A. Rawlinson, Australian J. exp. biol. med. Sci. *18*, 185 (1940).

[4] L. Michaelis, C. D. Coryell und S. Granick, J. biol. Chem. *148*, 463 (1943).

[1] H.-J. Bielig und E. Bayer, Naturwissenschaften *42*, 125 (1955); Chem. Ber., im Druck (1955).

[2] Zusammenfassung in P. W. Selwood, *Magnetochemistry*, S. 52 (Interscience Publishers, New York 1943).